

## Тема 4 Геометрические характеристики плоских сечений

### Основные понятия

При решении задач, связанных с различными видами деформаций (например, растяжение, кручение, изгиб) возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений бруса.

Остановимся более подробно на них. Возьмем некоторое поперечное сечение площадью  $A$  и свяжем его с системой координат  $xoy$  (рис. 4.1).

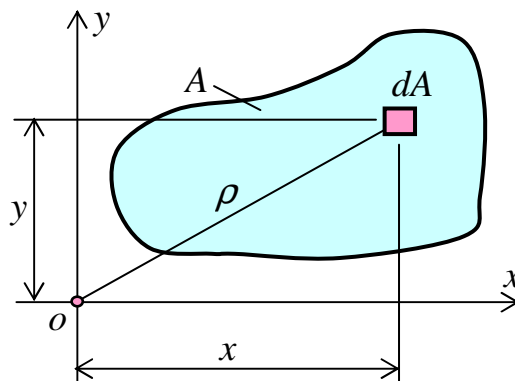


Рис. 4.1

Выделим элементарную площадку  $dA$  и рассмотрим следующие интегралы:

$$A = \int_A dA \quad (m^2), \quad S_x = \int_A y \cdot dA \quad (m^3), \quad S_y = \int_A x \cdot dA \quad (m^3), \quad I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (m^4),$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad (m^4), \quad I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_x \quad (m^4),$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad (m^4),$$

где индекс  $A$  у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения.

Здесь:  $A$  – *площадь* поперечного сечения бруса. Является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения;  $S_x$ ,  $S_y$  – *статические моменты* сечения относительно соответствующих осей  $x$  и  $y$ . Они равны взятой по всей площади  $A$  сумме произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния от этих осей;  $I_x$ ,  $I_y$  – *осевые моменты инерции* сечения относительно соответствующих осей  $x$  и  $y$ ;  $I_\rho$  – *полярный момент инерции* сечения относительно некоторой точки (полюса). Он равен взятой по всей площади  $A$  сумме произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояния от этой точки;  $I_{xy}$  – *центробежный момент инерции* сечения относительно некоторых двух взаимно – перпендикулярных осей  $x$  и  $y$ .

## Центробежный момент инерции сечения

Очевидно, что  $A$ ,  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_\rho$  всегда положительны. Прочие величины могут быть как положительными так и отрицательными и равными нулю. Последнее возможно при переходе от любой старой к любой новой системе координат, что в самом общем случае можно рассматривать как два последовательных преобразования старой системы координат:

1. путем параллельного переноса осей координат в новое положение,
2. путем поворота их относительно нового начала координат.

Центробежный момент инерции  $I_{xy}$  сечения, показанного на рис. 4.2, а, относительно осей  $x$  и  $y$  положителен, так как для основной части этого сечения, расположенной в первом квадранте, значения  $x$  и  $y$ , а следовательно, и  $\int_A x \cdot y \cdot dA$  положительны. Аналогично,  $I_{x_1y_1}$  будет отрицательным по той же причине.

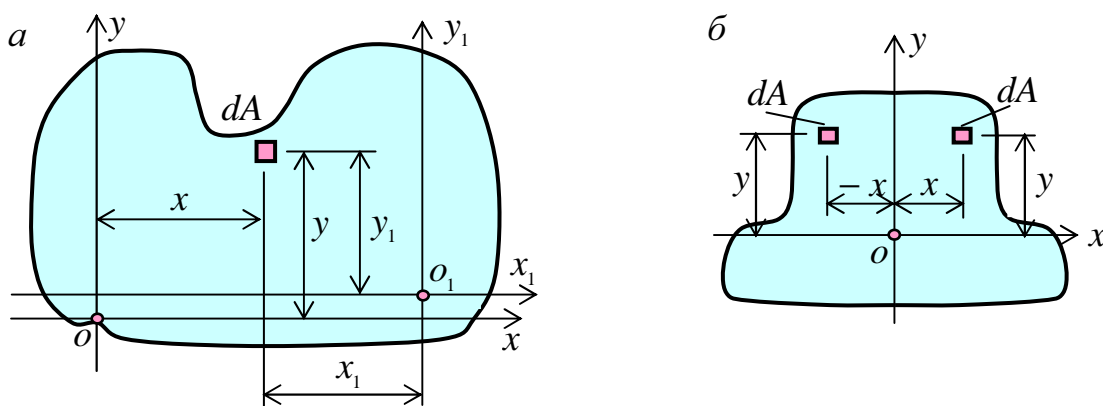


Рис. 4.2

Для фигуры, симметричной относительно оси  $y$  (рис. 4.2, б), каждой элементарной площадке  $dA$ , расположенной справа от оси  $y$ , соответствует такая же площадка  $dA$ , расположенная симметрично первой, но слева от оси  $y$ . Центробежный момент инерции каждой пары таких симметрично расположенных площадок равен:

$$dI_{xy} = x \cdot y \cdot dA + (-x) \cdot y \cdot dA = 0 \text{ и следовательно, } I_{xy} = 0.$$

Таким образом, центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.

## Статические моменты сечения

Посмотрим, как меняются геометрические характеристики при параллельном переносе осей координат. Рассмотрим две пары параллельных осей  $xoy$  и  $x_1o_1y_1$  (рис. 4.3). Пусть расстояния между осями  $x$  и  $x_1$  равно  $a$ , а между осями  $y$  и  $y_1$  равно  $b$ . В этом случае будут справедливы соотношения  $y_1 = y + a$  и  $x_1 = x + b$ . Кроме того известны площадь сечения  $A$  и статические моменты сечения  $S_{x_1}$  и  $S_{y_1}$  относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ . Тогда

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A (y_1 - a) \cdot dA = S_{x_1} - a \cdot A \quad \text{и} \quad S_y = \int_A x \cdot dA = \int_A (x_1 - b) \cdot dA = S_{y_1} - b \cdot A.$$

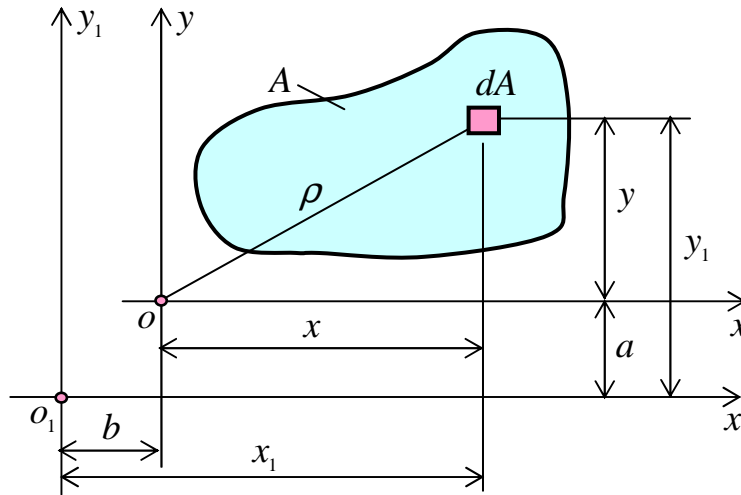


Рис. 4.3

Очевидно, что можно подобрать такие  $a$  и  $b$ , что  $S_x = 0$  и  $S_y = 0$ . Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются *центрными*. Причем расстояния до центральных осей  $x$  и  $y$  от некоторых, произвольно выбранных осей  $x_1$  и  $y_1$  равны  $a = y_c = \frac{S_{x_1}}{A}$  и  $b = x_c = \frac{S_{y_1}}{A}$ .

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.

Выражения  $a = y_c = \frac{S_{x_1}}{A}$  и  $b = x_c = \frac{S_{y_1}}{A}$  дают возможность определить положение центра тяжести сечения, если найдены статические моменты, или, наоборот, найти статические моменты, если известно положение центра тяжести сечения и его площадь  $S_{x_1} = A \cdot y_c$  (рис.4.4).

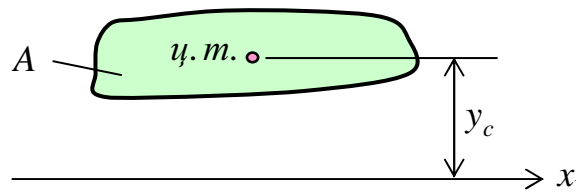


Рис. 4.4

### Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Итак, положение центра тяжести сечения найдено, определены геометрические характеристики  $A$ ,  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$  относительно центральных осей  $хоу$ , причем  $S_x = 0$  и  $S_y = 0$ . Посмотрим, как  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$  изменятся при переходе от центральных осей  $хоу$  к произвольным осям  $x_1o_1y_1$  (рис.4.3).

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a)^2 \cdot dA = I_x + 2 \cdot a \cdot S_x + a^2 \cdot A = I_x + a^2 \cdot A ,$$

$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_A (x + b)^2 \cdot dA = I_y + 2 \cdot b \cdot S_y + b^2 \cdot A = I_y + b^2 \cdot A ,$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 \cdot dA = \int_A (x + b)(y + a) \cdot dA = I_{xy} + a \cdot S_y + b \cdot S_x + a \cdot b \cdot A = I_{xy} + a \cdot b \cdot A .$$

Таким образом, при переходе от центральных осей к нецентральному, осевые моменты инерции увеличиваются на величины  $(a^2 \cdot A)$  и  $(b^2 \cdot A)$ , а при переходе от нецентральных к центральным уменьшаются на эти же величины.

### Главные оси инерции. Главные моменты инерции

Две взаимно – перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  называются *главными осями инерции*, если центробежный момент инерции сечения относительно их равен нулю ( $I_{xy} = 0$ ), а осевые моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  достигают экстремальных (максимальные и минимальные) значений  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$ .

*Экстремальные значения осевых моментов инерции сечения называются главными моментами инерции.*

Обычно это достигается путем поворота взаимно – перпендикулярных осей  $x$  и  $y$  на произвольный угол  $\alpha$  относительно начала координат. При этом сумма осевых моментов инерции сохраняет постоянную величину при повороте осей на любой угол.

Этот результат объясняется также тем, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно – перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат, величина же которого не изменяется, если начало координат остается на месте, а координатные оси поворачиваются.

Главные оси инерции можно провести через любую точку, взятую в плоскости сечения. Однако практическое значение для расчетов элементов конструкций имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, т. е. *главные центральные оси инерции*.

Заметим, что ось симметрии всегда является главной центральной осью.

### Вычисления моментов инерции сечений простой формы

Используем полученные формулы для вычисления геометрических характеристик некоторых простейших фигур (рис. 4.5).

Из прямоугольного сечения (рис. 4.5, а) выделим линиями, параллельными оси симметрии  $x$ , элементарную полоску высотой  $dy$  и шириной  $b$ . Площадь этой полоски  $dA = b \cdot dy$ , расстояние от полоски до оси  $x$  равно  $y$ . Тогда

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot dy = b \cdot (y)_{-h/2}^{h/2} = b \cdot \left[ \frac{h}{2} - \left( -\frac{h}{2} \right) \right] = b \cdot h ,$$

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \left( \frac{y^3}{3} \right)_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} \cdot \left[ \frac{h^3}{8} - \left( -\frac{h^3}{8} \right) \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

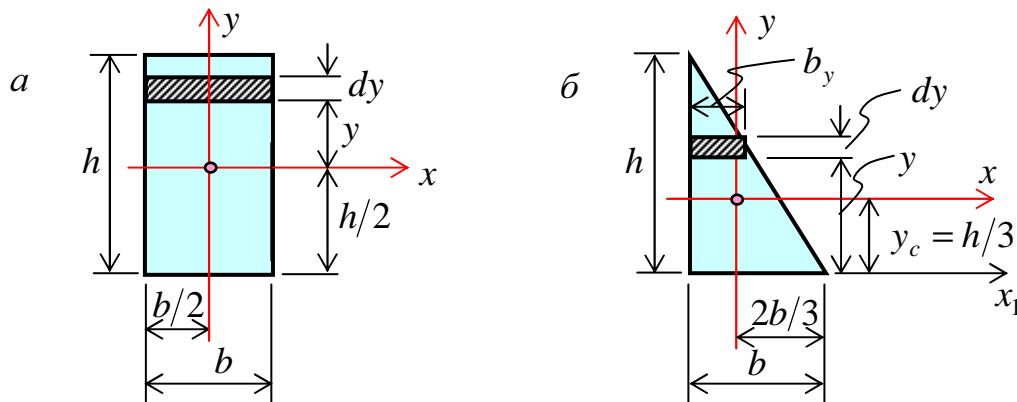


Рис. 4.5

Аналогичным путем для момента инерции относительно оси другой симметрии  $y$  можно получить выражение  $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ . Заметим, что в выражениях для  $I_x$  и  $I_y$  в куб возводится размер, перпендикулярный оси, относительно которой вычисляется геометрическая характеристика.

Для прямоугольного треугольного сечения имеем (рис.4.5, б)

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}, \quad \text{или} \quad b_y = b \cdot \frac{h-y}{h}. \quad \text{Площадь элементарной полоски}$$

$$dA = b_y \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy. \quad \text{Тогда}$$

$$A = \int_0^h dA = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left( h \cdot y - \frac{y^2}{2} \right)_0^h = \frac{b}{h} \cdot \left[ h^2 - \left( \frac{h^2}{2} \right) \right] = \frac{b \cdot h}{2},$$

$$S_{x_1} = \int_0^h y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left( h \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^h = \frac{b}{6 \cdot h} \cdot [3 \cdot h^3 - 2 \cdot h^3] = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{h}{3}, \quad \text{аналогично} \quad x_c = \frac{b}{3},$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left( h \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)_0^h = \frac{b}{12 \cdot h} \cdot [4 \cdot h^4 - 3 \cdot h^4] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Поскольку ось  $x$  центральная и параллельна случайной оси  $x_1$ , то справедливо соотношение  $I_{x_1} = I_x + (y_c)^2 \cdot A$  или  $\frac{b \cdot h^3}{12} = I_x + \left( \frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$  или

$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$ . Аналогично относительно другой центральной оси  $y$  получаем

$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$ . Здесь в куб возводится размер, перпендикулярный оси, относительно которой вычисляется геометрическая характеристика.

Равнобедренный треугольник (оси  $xoy$  на рис.4.6<sup>а</sup>, а) можно представить в виде двух одинаковых прямоугольных треугольников (оси  $x_1o_1y_1$ ). Тогда согласно формулам параллельного переноса имеем

$$I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot \frac{(b/2) \cdot h^3}{36} = \frac{b \cdot h^3}{36},$$

$$I_y = 2 \cdot [I_{y_1} + (y_c)^2 \cdot A] = 2 \cdot \left[ \frac{h \cdot (b/2)^3}{36} + (b/6)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h \right] = \frac{h \cdot b^3}{48}.$$

Для круглого сечения, относительно любой оси, проходящей через центр круга, мы будем иметь одно и тоже значение осевого момента инерции  $I_x$ . Тогда

$I_\rho = I_y + I_x = 2 \cdot I_x$ . Чтобы получить формулу для полярного момента инерции сечения относительно центра, выделим из круга элементарное кольцо толщиной  $d\rho$ , радиусом  $\rho$  и площадью  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$  (рис. 4.6, б) и вычислим интеграл

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} \right)_0^R = \frac{\pi \cdot R^4}{2}, \text{ отсюда } I_x = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

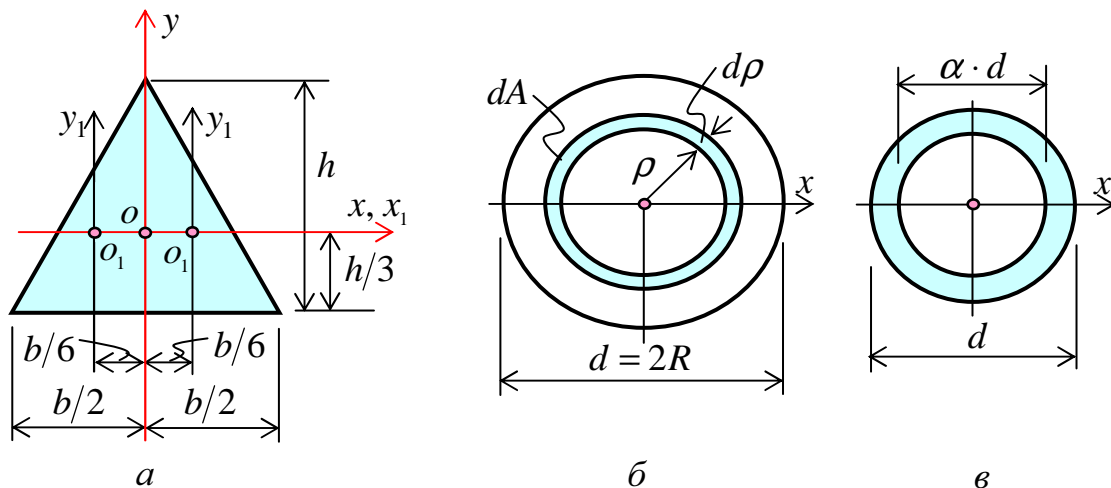


Рис. 4.6

Моменты инерции (полярный и осевой) сечения, имеющего форму кругового кольца с наружным диаметром  $d$  и внутренним  $(\alpha \cdot d)$  (рис. 4.6, в), можно определить как разности между соответствующими моментами инерции наружного и внутреннего кругов:

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{64} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

### **Вычисления моментов инерции сложных сечений с одной осью симметрии**

Способ вычисления моментов инерции сложных сечений основан на том, что любой интеграл можно рассматривать как сумму интегралов и, следовательно, момент инерции любого сечения вычислять как сумму моментов инерции отдельных его частей.

Поэтому для вычисления моментов инерции сложное сечение разбивается на ряд простых частей (фигур) с таким расчетом, чтобы их геометрические характеристики можно было вычислить по известным формулам или найти по специальным справочным таблицам.

Для каждой простой фигуры выбирается прямоугольная центральная система координат, причем все они принимаются параллельными друг другу для того, чтобы затем путем параллельного переноса осей можно было подсчитать моменты инерции всех частей относительно системы координат, общей для всего сложного сечения, которая совпадает с главными центральными осями..

Поскольку конечной целью вычисления геометрических характеристик сложного сечения является определение его главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей инерции, то следующим этапом вычисления является определение координат центра тяжести заданного сечения по формуле

$$y_c = \frac{\sum S_{x_k}^i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $n$  – количество простых фигур;  $x_k$  – вспомогательная ось, относительно которой определяются координаты центра тяжести сложной фигуры;  $y_i$  – расстояние от вспомогательной оси  $x_k$  до центра тяжести  $i$  простой фигуры.

Ограничимся рассмотрением сложных сечений, имеющих хотя бы одну ось симметрии, поскольку такие типы сечений получили наибольшее распространение в технике и строительстве. В этом случае определение положения главных центральных осей инерции сечения значительно упрощается. Вторая главная центральная ось (первая – ось симметрии) будет перпендикулярна оси симметрии и пройдет через центр тяжести заданного сечения.